第42卷　第3期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 42　No. 3
2003年　5月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　May　2003

卡尔曼滤波模型粗差的探测及其在施工变形测量中的应用*

许国辉[1]，**张新长**[2]
（1. 广州大学 土木工程学院，广东 广州 510405；
2. 中山大学城市与资源规划系，广东 广州 510275）

摘　要：在施工变形监测中，由于监测点的多余观测值较少，因此很难发现观测值中存在的粗差。用卡尔曼滤波方法进行数据处理时，观测值中的粗差将在预测残差向量中得到反映。通过分析卡尔曼滤波模型误差与预测残差向量之间的关系，提出了对粗差进行探测的方法，并通过一个实例说明了该方法的有效性。

关键词：卡尔曼滤波；滤波模型；粗差；探测
中图分类号：P228　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0529-6579（2003）03-0089-03

关于粗差的定位与剔除，目前常用的有以均值漂移模型为基础的粗差探测法和以污染误差模型理论为基础的抗差估计[1,2]等方法，这些方法都要求观测网必须具有一定的几何图形强度和多余观测数。而在施工变形监测中，很多情况下只能采用交汇观测法或极坐标观测法进行观测，各监测点在每期观测时的多余观测数极少，这时按上述方法很难对粗差进行准确的定位。采用卡尔曼滤波方法对测量数据进行处理时，可借助于状态参数的动态模型，通过对预测残差向量进行检验[3]，实现对粗差的动态定位。但对于施工变形监测，状态参数的动态模型并非是精确已知的，可能存在“异常”的模型误差，其误差也将在预测残差向量中得到反映。所以，当用预测残差向量对滤波模型进行检验并发现滤波模型不正常时，还必须区分是观测模型不正常还是动态模型不正常。本文先介绍卡尔曼滤波方法，然后探讨粗差探测的方法，最后介绍一个应用实例。

1　卡尔曼滤波

卡尔曼滤波模型包括状态参数的动态模型、观测模型和随机模型，离散化后，卡尔曼滤波模型的形式为[4]：

$$X_k = \boldsymbol{\Phi}_{k,k-1} X_{k-1} + \boldsymbol{\Omega}_k \tag{1}$$

$$L_k = B_k X_k + \boldsymbol{\Delta}_k \tag{2}$$

其中，式（1）为状态参数的动态模型，式（2）为观测模型。L_k、X_k 分别为第 k 期监测的观测向量和状态参数向量，B_k、$\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}$ 为系数矩阵，$\boldsymbol{\Omega}_k$ 为动态噪声，$\boldsymbol{\Delta}_k$ 为观测噪声，它们服从正态分布。随机模型为：

$$\begin{aligned}
&E(\boldsymbol{\Omega}_{k-1}) = 0,\quad E(\boldsymbol{\Delta}_k) = 0,\\
&\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Omega}_k) = Q_{\Omega_k},\ \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\Delta}_k,\boldsymbol{\Delta}_k) = Q_{\Delta_k}\\
&\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Omega}_j) = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\Delta}_k,\boldsymbol{\Delta}_j) = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Delta}_j) = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

其中，Q_{Ω_k}，Q_{Δ_k} 分别为 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 和 $\boldsymbol{\Delta}_k$ 的协方差矩阵。

第 k 期状态参数向量 X_k 的一步预测值 $X_{k,k-1}$ 及其协方差矩阵 $Q_{k,k-1}$ 为

$$\begin{aligned}
X_{k,k-1} &= \boldsymbol{\Phi}_{k,k-1} X_{k-1}\\
Q_{k,k-1} &= \boldsymbol{\Phi}_{k,k-1} Q_{k-1} \boldsymbol{\Phi}^{T}_{k,k-1} + Q_{\Omega_k}
\end{aligned} \tag{4}$$

状态参数向量的滤波值 X_k 及其协方差矩阵 Q_k 为

$$\begin{aligned}
X_k &= X_{k,k-1} + J_k \boldsymbol{\xi}_k\\
Q_k &= Q_{k,k-1} - J_k B_k Q_{k,k-1}
\end{aligned} \tag{5}$$

式中，

$$J_k = Q_{k,k-1} B_k^T (B_k Q_{k,k-1} B_k^T + Q_{\Delta_k})^{-1} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\xi}_k = L_k - B_k X_{k,k-1} \tag{7}$$

其中，J_k 为卡尔曼滤波增益矩阵，$\boldsymbol{\xi}_k$ 为一步预测残差向量。

2　粗差探测

由式（1）-（4）可得 $\boldsymbol{\xi}_k$ 的数学期望 $E(\boldsymbol{\xi}_k)$ 及其协方差矩阵 Q_{ξ_k} 为：

$$\begin{aligned}
E(\boldsymbol{\xi}_k) &= B_k \boldsymbol{\Phi}_{k,k-1} E(\boldsymbol{\Delta}_{X_{k-1}}) +\\
&\quad B_k E(\boldsymbol{\Omega}_k) + E(\boldsymbol{\Delta}_k)\\
Q_{\xi_k} &= B_k Q_{k,k-1} B_k^T + Q_{\Delta_k}
\end{aligned} \tag{8}$$

* **收稿日期**：2002-08-01
作者简介：许国辉（1960年生），男，高级工程师；E-mail：gz_xgh@163.com

式中，$\Delta_{X_{k-1}} = X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}$，若前 $k-1$ 期滤波都正常，这时 $E(\Delta_{X_{k-1}}) = 0$。

由此可见，对于第 k 期滤波，若滤波模型正常 $(E(\Omega_k) = 0, E(\Delta_k) = 0)$，这时 $E(\xi_k) = 0$，$\xi_k \sim N(0, Q_{\xi_k})$，因此可以通过 ξ_k 对滤波模型进行检验。

2.1 初步探测

当滤波模型正常时，ξ_k 应服从均值为零的正态分布，假设检验为：

零假设 $H_0: \xi_k \sim N(0, Q_{\xi_k})$ (9)

备选假设 $H_1: \xi_k \sim N(W_k, Q_{\xi_k})$ (10)

其中，$W_k \neq 0$，构造检验统计量 T_k[3]

$$T_k = \xi_k^{\mathrm{T}} Q_{\xi_k}^{-1} \xi_k \sim \chi^2(n_k, 0) \tag{11}$$

对于给定的显著性水平 α，当 $T_k < \chi_\alpha^2$ 时，接受 H_0 假设，可照常滤波；当 $T_k \geq \chi_\alpha^2$ 时，接受 H_1 假设，即滤波模型不正常，需作二次探测。

2.2 二次探测

若观测模型正常而动态模型不正常，这时 $W_k = E(\xi_k) = B_k E(\Omega_k) = B_k V_k$（$V_k$ 为监测点的异动值），令：$\Omega_k = V_k + \omega_k$，其中 ω_k 与 Ω_k 分布相同，即 $\omega_k \sim N(0, Q_{\Omega_k})$，第 k 期的动态模型可修改为：

$$X_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + V_k + \omega_k \tag{12}$$

相应地可得第 $k+1$ 期的动态模型和观测模型为：

$$X_{k+1} = \Phi_{k+1,k} X_k + V_{k+1} + \omega_{k+1} \tag{13}$$

$$L_{k+1} = B_{k+1} X_{k+1} + \Delta_{k+1} \tag{14}$$

这时若仍采用式（1）进行滤波，则 X_{k+1} 的二步预测值 $\hat{X}_{k+1,k-1}$ 为：

$$\hat{X}_{k+1,k-1} = \Phi_{k+1,k-1} \hat{X}_{k-1} \tag{15}$$

由式(13) - (15)可得二步预测残差向量 η_{k+1} 为：

$$\eta_{k+1} = B_{k+1} \Phi_{k+1,k-1} \Delta_{X_{k-1}} + B_{k+1} V'_{k+1} + B_{k+1} \omega'_{k+1} + \Delta_{k+1} \tag{16}$$

式中，$\Phi_{k+1,k-1} = \Phi_{k+1,k} \Phi_{k,k-1}$，$V'_{k+1} = \Phi_{k+1,k} V_k + V_{k+1}$，$\omega'_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \omega_k + \omega_{k+1}$，$\eta_{k+1}$ 的数学期望及其协方差矩阵为：

$$\begin{aligned} E(\eta_{k+1}) &= B_{k+1} V'_{k+1} \\ Q_{\eta_{k+1}} &= B_{k+1} Q_{k+1,k-1} B_{k+1}^{\mathrm{T}} + Q_{\Delta_{k+1}} \end{aligned} \tag{17}$$

即：当动态模型不正常时，η_{k+1} 服从非零均值的正态分布。

若动态模型正常而观测模型不正常，这时 $W_k = E(\xi_k) = E(\Delta_k) = U_k$（$U_k$ 为粗差值）。由于粗差出现的概率非常小，而且在实际监测中，若发现第 k 期滤波模型不正常，在第 $k+1$ 期观测时往往十分谨慎，这时出现粗差的概率更小。因此可以认为，在发现滤波模型已有不正常现象的条件下，连续两期观测都出现粗差几乎是不可能的。这时 η_{k+1} 将服从零均值的正态分布。在以上假定条件下，假设检验为：

零假设为 H_0：

$$\eta_{k+1} \sim N(0, Q_{\eta_{k+1}}) \quad 即\ \Delta_k \sim N(U_k, Q_{\Delta_k}) \tag{18}$$

备选假设 H_1：

$$\eta_{k+1} \sim N(B_{k+1} V'_{k+1}, Q_{\eta_{k+1}})$$

$$即\ \Omega_k \sim N(V_k, Q_{\Omega_k}) \tag{19}$$

构造检验统计量 R_{k+1}

$$R_{k+1} = \eta_{k+1}^{\mathrm{T}} Q_{\eta_{k+1}}^{-1} \eta_{k+1} \sim \chi^2(n_{k+1}, 0) \tag{20}$$

对于给定的显著性水平 α，当 $R_{k+1} < \chi_\alpha^2$ 时，接受零假设 H_0，即动态模型正常，第 k 期观测值中有粗差，需作进一步检验。当 $R_{k+1} > \chi_\alpha^2$ 时，接受备选假设 H_1，即动态模型不正常，应考虑修正动态模型。

2.3 三次探测

若二次探测时零假设 H_0 被接受，则应对 ξ_k 的每个分量进行探测。设 $\xi_k(i)$ 为 ξ_k 的第 i 个分量，与之对应的观测分量为 $L_k(i)$，$Q_{\xi_k}^{-1}(i)$ 为矩阵 $Q_{\xi_k}^{-1}$ 的第 i 个对角元素，构造检验统计量 $T_k(i)$：

$$T_k(i) = \xi_k^2(i) Q_{\xi_k}^{-1}(i) \sim \chi^2(1, 0) \tag{21}$$

对于给定的显著性水平 α，当 $T_k(i) \geq \chi_\alpha^2$ 时，则该分量不正常，即与之对应的观测分量 $L_k(i)$ 可能有粗差，应剔除。

3 应用实例

广州市于 2000 年在增步河旧桥的两侧各建一座新桥，为了避免新桥的施工对旧桥的影响，要求在新桥施工期间对旧桥进行监测。监测点共 8 个，分别布置在旧桥的两座桥台和桥墩上，大部分监测点在第 10 期以后的观测中采用极坐标法进行监测，共完成 28 期平面位移监测。

观测数据采用（α - β）滤波模型[4]进行处理，粗差探测时，取显著水平为 $\alpha = 0.01$，8 个监测点共探测到 5 个粗差（表 1），其中 1 号测点和 6 号测

表 1 粗差探测表1)

Tab. 1 Table of gross error detection

点号	1	1	6	6	7	3
k	10	23	19	23	10	11
T_k	14.73	19.88	21.15	10.69	10.53	10.97
R_{k+1}	4.12	0.02	3.18	0.39	2.52	1.64

1) 各点的自由度均为 2，$\chi_{0.01}(2, 0) = 9.21$

点各有 2 次粗差, 7 号测点有 1 次粗差。实测中, 3 号点不含粗差, 为了检验本方法的有效性, 在 3 号点第 11 期的距离观测值中, 人为地加入 + 5. 0 mm 的小粗差。由此可见, 本方法对于粗差的检验十分有效。

4　结束语

在变形监测中, 粗差的存在将使监测结果受到歪曲。通过实例证明, 在每期监测多余观测数很少的情况下, 本文所介绍的粗差检验方法能有效地对各期观测值中的粗差进行探测, 从而消除粗差对监测结果的影响。在本例的应用中, 没有发现动态模型不正常的情况, 所以关于动态模型检验方法的有效性以及动态模型的修正方法还需进一步验证和探讨。

参考文献:

[1] 朱建军,曾卓乔. 污染误差模型下的测量数据处理理论[J]. 测绘学报,1999(3):215 - 220.
[2] 宋力杰,杨元喜. 均值漂移模型粗差探测法与 LEGE 法的比较[J]. 测绘学报,1999(4):295 - 300.
[3] 何海波, 杨元喜. GPS 动态测量连续周跳检验[J]. 测绘学报,1999(3):199 - 203.
[4] 刘大杰,于正林. 动态测量系统与卡尔曼滤波[J]. 测绘学报,1988(4):254 - 262.

Gross Error Detection of Kalman Filtering Model and Its Application in Construction Deformation Measurements

XU Guo-hui[1] , *ZHANG Xin-chang*[2]
(1. School of Civil Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510405, China;
2. Department of City and Resources Program, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: For lack of redundant observations in construction deformation monitoring, it is difficult to discover the gross errors in observations. When the data were processed with Kalman filtering method, the gross errors could be found in the forecasting residual vector. By analyzing the relationship of the Kalman filtering model errors and the forecasting residual vector, a method of detecting gross errors was proposed. Its effect was verified through an example.

Key words: Kalman filtering; filtering mode; gross error; detection