

# 地图面积量算的数学模型及误差分析

张 新 长

在地图上进行面积量算是科研及规划等应用工作中经常遇到的实际问题,它在国土治理、区域规划等许多方面有着重要意义。本文着重讨论的是如何应用现在已很普及的微机准确地 进行面积量算。

## 1 建立数值积分的一般公式

面积计算,在数学上可以认为是在二维坐标系中的一个定积分\* (如图 1):

根据函数  $x=f(y)$  在区间  $[a, b]$  上的若干个 点  $y_1, y_2, \dots, y_n$  处的值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  便可以用 Lagrang 插值多项式近似地把  $f(y)$  表示出来,多项式是一种十分简便的函数,不但计算方便,求积分也很方便,当然也可以根据图形实际构造其它类型的函数表示。

设:

$$f_m(y) = c_0 y^m + c_1 y^{m-1} + \dots + c_{m-1} y + c_m \quad (1)$$

$$f_m(y_i) = x_i \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

若取  $m=n$  便可根据(2)将(1)中的  $n+1$  个系数确定下来,其系数满足方程:

$$\begin{cases} c_0 y_0^n + c_1 y_0^{n-1} + \dots + c_n = f_0 = x_0 \\ c_0 y_1^n + c_1 y_1^{n-1} + \dots + c_n = f_1 = x_1 \\ \dots \\ c_0 y_n^n + c_1 y_n^{n-1} + \dots + c_n = f_n = x_n \end{cases} \quad (3)$$

这是一个含有  $n+1$  个未知数  $c_0, c_1, \dots, c_n$  的线性方程组,它的行列式:

$$W(y_0, y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_0^n & y_0^{n-1} & \dots & 1 \\ y_1^n & y_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_n^n & y_n^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

称为 Vander Monde 行列式,可以证明,当  $y_0, y_1, \dots, y_n$  互异时,  $W(y_0, y_1, \dots, y_n)$  的值不等于零,所以这个方程组(3)有唯一的一组解,这样就确定了图形边界曲线的近似方程表达式:

$$L_n(y) = c_0 y^n + c_1 y^{n-1} + \dots + c_n$$

用 Lagrang 插值多项式  $L_n(y)$  来代替  $f(y)$

$$f(y) = L_n(y) + R_n(y) \quad (\text{其中 } R_n(y) \text{ 为余项})$$

在区间  $[a, b]$  上求积分,就得到所求的面积

$$\int_a^b f(y) dy = \int_a^b L_n(y) dy + \int_a^b R_n(y) dy = \int_a^b L_n(y) dy \quad (5)$$

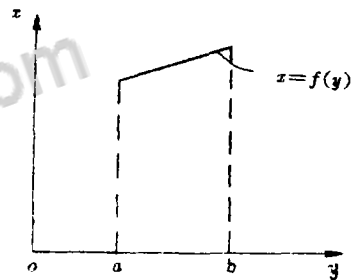


图 1

\* 为了使数学公式及图件与地图上统一,定义  $y$  为横坐标轴,  $x$  为纵坐标轴。

从以上的讨论可知,在区间 $[a, b]$ 上所取插值点的个数是任意的。不同的个数就可构成不同次数的插值多项式,不过在一般情况下,取 $n=2$ 即取三个点坐标所构造的多项式较为常用,它称为 Simpson 公式。

## 2 Simpson 公式

$n=2$  时,如前述可以写出如下式子:

$$f_2(y) = c_0 y^2 + c_1 y + c_2$$

由三个插值点 $(y_0, x_0)$ 、 $(y_1, x_1)$ 、 $(y_2, x_2)$ 来确定 $c_0, c_1, c_2$ :

$$\begin{cases} c_0 y_0^2 + c_1 y_0 + c_2 = x_0 \\ c_0 y_1^2 + c_1 y_1 + c_2 = x_1 \\ c_0 y_2^2 + c_1 y_2 + c_2 = x_2 \end{cases} \text{ 和 } W(y_0, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_0^2 & y_0 & 1 \\ y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = W$$

它的解:

$$C_0 = \frac{W_0}{W}; \quad C_1 = \frac{W_1}{W}; \quad C_2 = \frac{W_2}{W}.$$

其中:

$$W_0 = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}; \quad W_1 = \begin{vmatrix} y_0^2 & x_0 & 1 \\ y_1^2 & x_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}; \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_0^2 & y_0 & x_0 \\ y_1^2 & y_1 & x_1 \\ y_2^2 & y_2 & x_2 \end{vmatrix}.$$

Simpson 公式实际上就是用一段抛物线来近似代替地图边界曲线,故也称它为抛物线求积公式,如图 2 所示。

余项  $R_2$  的讨论:

对于等距插值基点,即 $y_0 = a, y_1 = (a+b)/2, y_2 = b$   
根据 Newton-Coats 余项公式

$$R_2 = \int_a^b R_2(y) dy = -\frac{(b-a)^5}{280} f^{(4)}(\xi) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad (6)$$

其中 $h = (a+b)/2, f^{(4)}(\xi)$ 为由图形所决定的方程( $\xi$ 点的四阶导数(假定它存在))。这个公式在后面的精度分析中会用到。

在地图量测时,有时也需要测出国界、海岸线、河流等的长度,要得到这些量只要在软件上下点功夫,使在测出面积的同时就单独测出边界长度。

这里利用求面积时得到的中间结果,即抛物线的方程:

$f_2(x) = c_0 y^2 + c_1 y + c_2$  来计算边界长度。另外应用曲线积分  $L = \int ds$  计算边界长度也可以,其中  $ds = \sqrt{1+x'^2} = \sqrt{1+[c_0 y^2 + c_1 y + c_2]'^2} dy = \sqrt{1+c_0^2 y^2 + 4c_0 c_1 y + 4c_1^2} dy$

在量测的图形中,经常会遇到直边图形。如梯形或任意多边形,这时仍利用 Simpson 公式就比较繁琐,实际上使用梯形公式和两点距离公式就可以快速、准确地计算出面积和边长(如图 3)所示:

$$A_i = 1/2(x_2 + x_1)(y_1 - y_2)$$

$$L_i = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

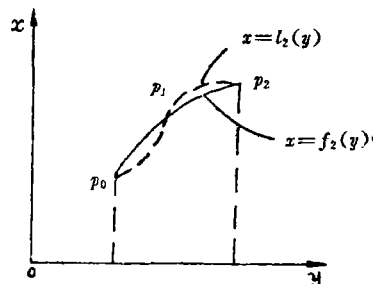


图 2

仅需测出折点处坐标即可。

为了防止计算中,混淆计算结果,可在程序中增加绘图功能,计算前先绘出图线的外形,以区分数据。

### 3 精度评价

上述所采用的 Simpson 公式是利用抛物线来近似代替原图轮廓曲线,它产生的误差称为原理误差。同时,由于所测量的内插点坐标的误差,带来了量测误差,下面讨论二者对测量结果的影响。

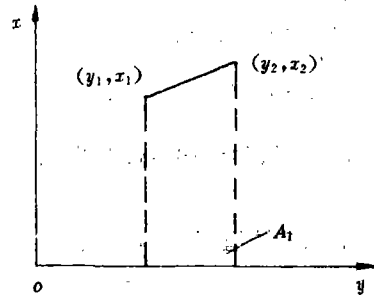


图 3

#### 3.1 原理误差

$$\text{由(5)式 } \int_a^b f(y)dy = \int_a^b L_n(y)dy + \int_a^b R_n(y)dy$$

可知其余式  $R$  即为原理误差。如果将区间分半,其余式成为:

$$\bar{R} = 2 \times \frac{-h^5}{2^5 \times 90} f^{(5)}(\xi) \quad (a < \xi < b)$$

一般  $\xi, \bar{\xi}$  相差不大,那么误差几乎降为原来的  $1/16$ 。因此只要适当加密插值点的个数,减小  $h$  就可以使原理误差降到所求的精度以内。对于非等距插值基点仍具有类似的意义。那么如何在地图量算中确定插值点的个数呢?这里可以采用综合评价法,先用  $n_1$  个点计算求出相应面积  $S_1$ ,再以  $n_2 (n_2 > n_1)$  求出一个  $S_2$ ,如果  $E = \left| \frac{S_2 - S_1}{S_2 - S_1/2} \right| < \epsilon$  的要求,即可用  $S_1$  作为本幅图的面积,对于类似的图幅,不用每张都这样测定,只需测出几幅确定单位长度的界线上需大概测几个点即可。计算长度时,也可用类似方法确定插值点个数。

#### 3.2 坐标量算误差

采用不同的方法来量算  $(y, x)$  会带来不同的量测误差,假设采用某种方法其精度为  $(\Delta y, \Delta x)$  现在来估计一下对计算结果的影响。

由于积分的抛物线是由三个坐标点来确定的,所以坐标的误差带来了抛物线方程系数的误差。当  $(y_0, x_0), (y_1, x_1), (y_2, x_2)$  均产生最大的误差时,即  $dy_0 = dy_1 = dy_2 = \pm \Delta y, dx_0 = dx_1 = dx_2 = \pm \Delta x$  时,可以证明:

$$dc_0 = 0; \quad dc_1 = 0;$$

$$dc_2 = \pm \left[ \frac{y_0^2(x_0 - x_1) + y_1^2(x_0 - x_2) + y_2^2(x_1 - x_2)}{A} \cdot \Delta y + \frac{y_0^2(y_1 - y_2) + y_1^2(y_2 - y_1) + y_2^2(y_0 - y_1)}{A} \cdot \Delta x \right]$$

显然是抛物线产生了平移,如图 4、图 5 所示的  $dy_0, dy_1, dy_2$  及  $dx_0, dx_1, dx_2$  不相等时产生的变形,这种变形造成的面积误差没有图 4 情况下大,一般可以下结论:在

$$dy_0 = dy_1 = dy_2 = \pm \Delta y$$

$$dx_0 = dx_1 = dx_2 = \pm \Delta x$$

时,产生了最大坐标点量算误差,并且误差值同三个坐标的值有关,即对于不同的位置,同一误差对抛物线形状和位置的影响不同,得出了抛物线系数的误差表达式,便可计算由此产生的面积误差:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} (c_0 y^2 + c_1 y + c_2) dy = \left[ \frac{1}{3} c_0 y^3 + \frac{1}{2} c_1 y^2 + c_2 y \right]_{y_1}^{y_2}$$

$$ds = \left[ \frac{1}{3} y^3 dc_0 + \frac{1}{2} y^2 dc_1 + y dc_2 \right]_{y_1}^{y_2}$$

最大情况下:  $dc_0 = dc_1 = 0$

$$ds = [ydc_2]r_2^2 \quad (7)$$

有了上述公式,就可根据不同测量手段所具有的  $\Delta y, \Delta x$  来估算本次计算的面积所产生的最大坐标量算误差。

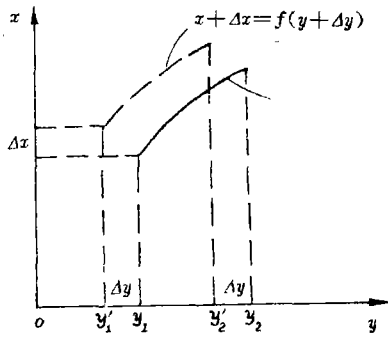


图 4

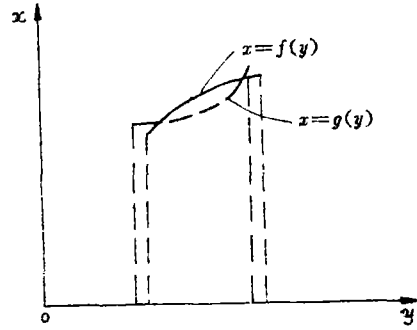


图 5

#### 4 在地图上量测面积所具有的误差及其修正

##### 4.1 纸张变形误差

由于实际纸张变形相当复杂,它的各个部分变形情况不一致,所以在一幅图上对每一分面积,尽可能用这个分面积所在部分的变形率去修正。一般是利用公里网即可测出这一部分的变形率,即为:

$$K = m_1 + m_2^2/2 + m_2' + m_2'^2/2 = m_1 \times m_2 = S : S' \quad (8)$$

其中  $m_1, m_2$  分别为所修正区域二垂直方向的变形率,  $k$  为纸张变形系数,  $S, S'$  分别为图上和实地面积。

对于大面积可以分块进行纠正,经过纠正,其剩余误差就很小了,可以忽略不计。

##### 4.2 成图误差

地图本身从外业控制点测量到航片成图以及编印过程都带了一定的误差,这些误差最终归结为成图误差,下面列出各种误差对 1:10 万地形图印刷后所产生的中误差值:

点对控制网的误差	$M_1 = 0.25\text{km}^2$
航摄误差	$M_2 = 0.25\text{km}^2$
由经纬网组成的图廓误差	$M_3 = 0.21\text{km}^2$
原图转绘误差	$M_4 = 0.07\text{km}^2$
由印刷引起的网线套色误差	$M_5 = 0.72\text{km}^2$

#### 5 量测实例

为了对本文介绍的方法作进一步说明,下面以湖北省十堰市为例进行量算土地面积及修正。

##### 5.1 标定界线

根据各种资料,在四幅 1:10 万地形图上确定了十堰市的界线。

## 5.2 坐标量测

用微机对四幅图的图廓及十堰市的市界进行数字化输入,并测出一系列点的坐标值。

## 5.3 计算面积和界线长度

将各幅图中所测坐标值分别通过计算机程序进行运算,得到每一幅图中十堰市占的面积和界线长度,其结果如下:

$$S_1=74.157\text{km}^2, \quad L_1=19.154\text{km}, \quad S_{10}=1474.24\text{km}^2$$

$$S_2=120.458\text{km}^2, \quad L_2=30.165\text{km}, \quad S_{20}=1473.46\text{km}^2$$

$$S_3=40.924\text{km}^2, \quad L_3=27.755\text{km}, \quad S_{30}=1480.83\text{km}^2$$

$$S_4=216.094\text{km}^2, \quad L_4=33.621\text{km}, \quad S_{40}=1480.31\text{km}^2$$

## 5.4 误差修正

A. 原理误差:采用综合评价法,对其中一幅用不同的点数分别进行计算:

$$n=85 \text{ 时}, S_1=120.452\text{km}^2; \quad n=67 \text{ 时}, S_2=120.547\text{km}^2$$

$$\text{由公式 } E = \left| \frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1 / 2} \right| = 0.785\% \text{, 精度满足要求。}$$

其余三幅图取的点密度类似于这幅图,其精度也大致相同。

B. 坐标量测误差:坐标量算发生的误差有正有负,最后累加抵偿剩余部分可忽略不计。

C. 纸张变形误差修正:

如图 6,根据公里网分别求出了在四幅图上的各块面积所在部分的变形系数为:

$$K_1=1.003; \quad K_2=0.996; \quad K_3=0.998; \quad K_4=1.002$$

其修正后实地面积为:

$$S'_1=73.935\text{km}^2; \quad S'_2=120.941\text{km}^2; \quad S'_3=40.006\text{km}^2; \quad S'_4=215.770\text{km}^2$$

经这样修正后,可以认为剩余误差忽略不计(见图 7)。

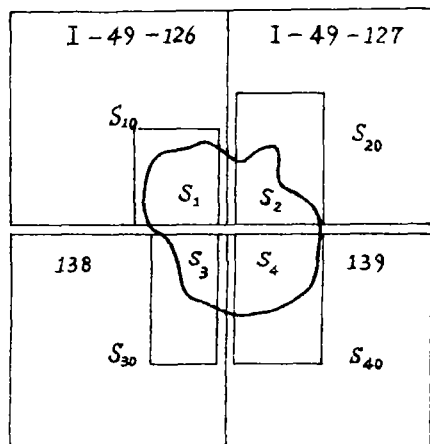


图 6

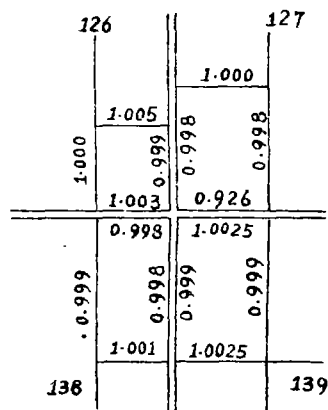


图 7

D. 投影误差:如前述,投影误差通过配赋大部分便可修正,不可修正部分最大可能产生误差为: \$\Delta S\_2=0.23\text{km}^2\$

E. 成图误差:所采用 1:10 万图上,前几项误差均存在,且无法消除,按误差分布将其合成为:

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2 + M_5^2} = 0.83\text{km}^2$$

近似将上述误差按正态分布,可能出现的极限误差为:  $\Delta A_2 = \sqrt{3} M = 1.44 \text{ km}^2$

## 6 总面积及精度

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 450.652 \text{ km}^2; \quad E = 0.74\%$$

相应的面积误差:  $\Delta S_3 = 0.74\% \times 450.652 = 0.33 \text{ km}^2$

因包含有四幅图,对于每一幅图投影误差均为负值,故投影误差应按等误差分布将四幅图的误差相加。

$$\Delta S_4 = \sqrt{4} \Delta S_1 = 2 \times 0.23 \text{ km}^2 = 0.46 \text{ km}^2$$

所以:  $\Delta S = \sqrt{\Delta S_1^2 + \Delta S_2^2 + \Delta S_3^2} = 1.55 \text{ km}^2$

$$S = (450.65 \pm 1.55) \text{ km}^2 \quad E = 1.55/450.65 = 3.4\%$$

可见主要的误差是由于地图本身的误差带来的,无法消除。

十堰市界线长度为:  $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 110.195 \text{ (km)}$

对于长度,若需要精确值也可根据所测数据进行纠正。

## 参 考 文 献

- 1 何旭初等编. 计算数学简明教程. 北京:人民教育出版社,1985.
- 2 高斯投影图廓坐标表:北京:测绘出版社,1979.
- 3 祝国瑞主编. 地图分析. 北京:测绘出版社,1992.

(上接 38 页)

系数是比较稳定的,边长改正数也是可观的。在设计过程中,为了避免工艺上的重复劳动,计数部分采用瑞士组装件,时基部分采用国内最好的恒温晶振,以及采用锁相倍频等措施。因此 MAF-1 频率计具有测频精度高,测频范围宽,可靠性好,重量轻的特点。在正常

情况下,该频率计预热一小时就可达到精度要求。如果配置光电测频仪,就可对没有测频接口的其它各种测距仪在野外测频,所以它是实现边频同测,达到高精度测距的优选仪器。

表 1 MAF-1 频率计在野外边频测试的部分记录

测站—镜站	观测值 (m)	ME 5000 的 $f_0$ (MHz)	MAF-1 测频 $f$ (MHz)	$(f_0 - f)/f_0$ (ppm)	频率改正 (mm)
A—B	6515.4005	480.03105	480.03067	0.792	-5.16
A—C	8003.1858	479.35817	479.35777	0.834	-6.68
A—D	4068.3861	480.03105	480.03065	0.833	-3.39
E—F	5601.9631	478.68530	478.68487	0.898	-5.03
E—G	8616.6998	478.01242	478.01203	0.816	-7.03

## 参 考 文 献

- 1 Kern&Co. Ltd. Refence Standard ME5000. Printed in Switaerland, 1988.
- 2 蓝锦添. 用彩色电视副载波校正测距仪频率. 测绘学报, 1986, 15(1): 63~69
- 3 文成生. 高速 ECL 电路使用中的有关问题处理. ECL 应用手册, 电子工业部第 871 厂, 1983. 37
- 4 陶健龙. ME 5000 的调制频率测定. 测绘通报, 1991(2): 30~32

论文发表、论文降重、论文润色请扫码



免费论文查重，传递门 >> <http://free.paperyy.com>

阅读此文的还阅读了：

- [1. 考虑实地距离的图上面积量算](#)
- [2. 地图面积量算的数字模型及误差分析](#)
- [3. 利用MAPGIS进行数字化地籍图图斑面积的量算](#)
- [4. 在地图上量算面积的精确算法](#)
- [5. 地图对GIS空间数据误差的影响初探](#)
- [6. 浅谈利用MAPGIS进行数字化地形图图斑面积的量算](#)
- [7. CASS在林权调查面积量算中的应用](#)
- [8. 应用MapGIS 6.7地图矢量化的误差分析探讨](#)
- [9. 宗地面积量算的误差分析](#)
- [10. 鄱阳湖面积容积量算及误差分析](#)
- [11. 全站仪在土地面积量算中的应用](#)
- [12. 小块面状要素的综合:一种竞争的方法\(二\)](#)
- [13. 浅谈利用MAPGIS进行数字化地形图图斑面积的量算](#)
- [14. 数据采集中的误差来源的分析](#)
- [15. 利用微机-数字化仪量算土地资源面积的研究](#)